

**Feuille d'exercices n°10**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_n = 2n - 1$ 
  - a) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme  $u_0$  et la raison  $r$ .
  - b) Calculer en fonction de  $n$ , la somme :  

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_n = 2^{u_n}$ 
  - a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme  $v_0$  et la raison  $q$ .
  - b) Calculer  $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$  en fonction de  $n$

**Exercice n°1:**

Soit  $\alpha$  un nombre réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:  $U_0=1$  et  $U_{n+1} = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha U_n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a:  $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$ .  
 b) Montrer que  $(U_n)$  est une suite croissante.
- 2) Soit la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \frac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$ 
  - a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique.
  - b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha$ . En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha$ .
  - c) Calculer la limite de la suite  $(U_n)$  en fonction de  $\alpha$ .
- 3) **Application:**

Etudier la limite de la suite  $(w_n)$  définie par:  $w_0=1$  et  $w_{n+1} = \frac{1}{4 - w_n}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice n°2:**

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0=0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

- 1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ . En déduire que la suite  $(U_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq U_n \leq 1$ .
- 3) Montrer que pour tout réel  $x \in [0, \pi]$ , on a :  $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .
- 4) a) Montrer alors que  $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 b) Calculer la limite de la suite  $(U_n)$ .

5) Déduire la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

### **Exercice n 3:**

Soit la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par:  $U_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$  où  $E(x)$

désigne la partie entière de  $x$ .

1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $x - 1 < E(x) \leq x$ .

2) En déduire que :  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3) calculer alors la limite de la suite  $(U_n)$ .

### **Exercice n 4:**

Soit la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0=0$ ;  $U_1=1$  et  $U_{n+2}=aU_{n+1}+(1-a)U_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $a$  un réel tel que :  $0 < a < 2$ .

1) Soit la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q=a-1$ .

b) Calculer  $(V_n)$  en fonction de  $n$  et  $a$ .

2) Soit la suite  $(W_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $W_n = U_{n+1} + (1-a)U_n$ .

Montrer que  $W_n=1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3) Prouver que  $(2-a)U_n = W_n - V_n$ .

4) Calculer la limite de la suite  $(U_n)$  en fonction de  $a$ .

### **Exercice n 5:**

Soient les deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0=1$ ,  $V_0=2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$U_{n+1} = \frac{1}{3}(2U_n + V_n)$  et  $V_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n)$ .

1) Soit la suite  $W_n = V_n - U_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $W_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .

2) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:  $U_n + V_n = 3$ .

3) En déduire que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont convergentes vers une même limite qu'on déterminera.