

Feuille d'exercices n°10

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$
- a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r .
- b) Calculer en fonction de n , la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = 2^{u_n}$
- a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison q .
- b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ en fonction de n

Exercice n°1:

Soit α un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par: $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha U_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a: $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$.
- b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par: $V_n = \frac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$
- a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
- b) Exprimer V_n en fonction de n et α . En déduire U_n en fonction de n et α .
- c) Calculer la limite de la suite (U_n) en fonction de α .
- 3) **Application:**

Etudier la limite de la suite (w_n) définie par: $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{1}{4 - w_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°2:

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

- 1) Calculer U_1 et U_2 . En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $0 \leq U_n \leq 1$.
- 3) Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, on a: $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
- 4) a) Montrer alors que $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Calculer la limite de la suite (U_n) .

5) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n 3:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par: $U_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$ où $E(x)$

désigne la partie entière de x .

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x - 1 < E(x) \leq x$.

2) En déduire que : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) calculer alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice n 4:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0=0$; $U_1=1$ et $U_{n+2}=aU_{n+1}+(1-a)U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et a un réel tel que : $0 < a < 2$.

1) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q=a-1$.

b) Calculer (V_n) en fonction de n et a .

2) Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par $W_n = U_{n+1} + (1-a)U_n$.

Montrer que $W_n=1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Prouver que $(2-a)U_n = W_n - V_n$.

4) Calculer la limite de la suite (U_n) en fonction de a .

Exercice n 5:

Soient les deux suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N} par : $U_0=1$, $V_0=2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_{n+1} = \frac{1}{3}(2U_n + V_n)$ et $V_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n)$.

1) Soit la suite $W_n = V_n - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que W_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n + V_n = 3$.

3) En déduire que (U_n) et (V_n) sont convergentes vers une même limite qu'on déterminera.